KANTONSSCHULE IM LEE
WINTERTHUR

MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2017

Klasse:	**4g**
Profil:	MN / M
Lehrperson:	Rolf Kleiner

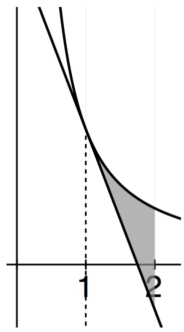
MATHEMATIK

Zeit:	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel:	Grafiktaschenrechner ohne CAS, beliebige Formelsammlung
Bemerkungen:	Die Prüfung enthält 10 Aufgaben mit 99 Punkten.
	Schreiben Sie Ihre Lösungswege klar nachvollziehbar auf.
	Geben Sie numerische Ergebnisse wenn möglich exakt, andernfalls sinnvoll gerundet an.

1. [12P] Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}$.

a) Bestimmen Sie den Wert von a so, dass die Funktion an der Stelle $x = 2$ ein lokales Extremum besitzt, und zeigen Sie mit Hilfe von Ableitungen sorgfältig, ob es sich dabei um ein lokales Minimum oder Maximum handelt.

Nun sei $a = 2$, bzw. $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ und t sei eine Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 1$.



b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t.

c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f.

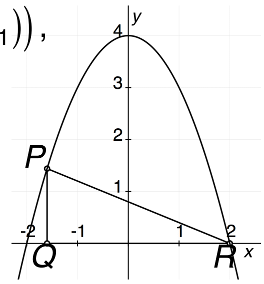
d) Es sei A der Flächeninhalt zwischen der Kurve von f, der Tangente t und $x = 2$. (siehe Figur)
Berechnen Sie den exakten Wert des Flächeninhalts A.

2. [8P] Die von der Kurve von $y = 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$, den beiden Koordinatenachsen und $x = b$ begrenzte Fläche wird um die x-Achse rotiert, wobei $b > 0$.

a) Bestimmen Sie den exakten Wert für das Volumen des Rotationskörpers.

b) Nun strebe $b \to \infty$. Untersuchen und kommentieren Sie kurz anhand des gegebenen Beispiels die Behauptung:
„Das Volumen eines Rotationskörpers ist nur dann endlich, wenn der Körper beschränkt ist, bzw. nicht ins Unendliche reicht."

3. [5P] Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x) = -x^2 + 4$.
Es sei A der Flächeninhalt des Dreiecks PQR, wobei $P(x_1, f(x_1))$, $Q(x_1, 0)$ und $R(2, 0)$. Dabei gilt $-2 \le x_1 \le 2$. (siehe Figur)



a) Zeigen Sie, dass $A(x_1) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1^3 - 2x_1^2 - 4x_1 + 8 \right)$.

b) Bestimmen Sie den Wert von x_1, für welchen der Flächeninhalt des Dreiecks PQR maximal wird.

4. [10P] Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot \ln(x)$ und die Gerade $y = m \cdot x$.

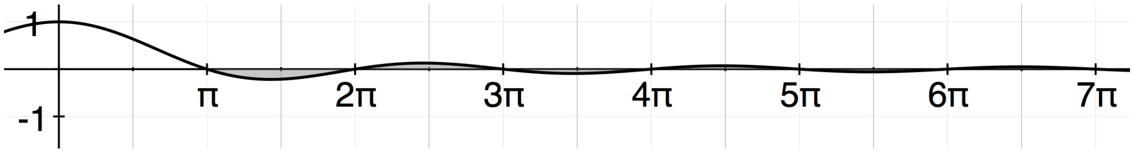
a) Der Graph von f schneidet die Gerade $y = 2x$ (d.h. $m = 2$) im Punkt S.
Bestimmen Sie die exakten Koordinaten von S sowie den Schnittwinkel.

b) Zeigen Sie, dass es für keinen Wert von m einen Punkt gibt, wo der Graph von f und die Gerade $y = mx$ sich <u>senkrecht</u> schneiden.

c) Bestimmen Sie ohne exakte Berechnung $\lim_{x \to 0} f(x)$.

5. [5P] Gegeben ist die Ableitung $f'(x) = -2x^2 + 6$ einer Funktion f.
Es sei P ein Punkt auf der Kurve von f (nicht f') im ersten Quadranten. Die Tangente an die Kurve von f im Punkt P hat die Gleichung $y = -2x + 5$.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion f.

6. [8P] Die Funktion $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ hat für $x > 0$ die Nullstellen $x = k \cdot \pi$, wobei $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ (siehe Figur)



a) Der Flächeninhalt zwischen der Kurve von f und der x-Achse zwischen den Nullstellen $x = k \cdot \pi$ und $x = (k+1) \cdot \pi$ kann mit Hilfe der Parabelmethode (Simpson) und zwei Teilintervallen angenähert werden. Zeigen Sie, dass sich so als Näherungswert $\dfrac{4}{6k+3}$ ergibt.

b) Es sei A der totale Flächeninhalt zwischen der Kurve von f und der x-Achse für $\pi \le x < \infty$. Notieren Sie als Annäherung für den Flächeninhalt A eine (unendliche) Reihe, indem Sie ein Σ-Zeichen benutzen und das Resultat aus Aufgabe **a)** verwenden. Erläutern Sie auch (ohne weitere Berechnungen), ob der totale Flächeninhalt A zwischen der Kurve von f und der x-Achse endlich oder unendlich ist.

7. [12P] Ein <u>gleichschenkliges</u> Dreieck ABC hat die Spitze $C(-5,3,2)$.
Die Basis AB liegt in der Ebene $E: 2x - y - 2z - 19 = 0$ wobei $A(21, -1, 12)$.
Die Höhe h_c des Dreiecks steht senkrecht auf der Ebene E.

a) Bestimmen Sie den Dreieckswinkel α.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Seitenmittelpunkts M_{AB} und der Ecke B.

c) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden, welche durch C geht und sowohl senkrecht zur Geraden (AC) verläuft als auch parallel zur Ebene E liegt.

8. [18P] Gegeben sind die Kugel K_1 mit Mittelpunkt $M_1(3, 1, 0)$ und Radius 10, die Ebene E: $3x - 4y - 30 = 0$ und der Punkt $R(10, 0, 5\sqrt{2})$.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Kugel K_1.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Kugel K_1 <u>berührt</u> und bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunkts.

c) Zeigen Sie, dass der Punkt $R(10, 0, 5\sqrt{2})$ auf dem Schnittkreis der Ebene E mit der Kugel K_1 liegt.

d) Bestimmen Sie den Radius des Schnittkreises der Ebene E mit der Kugel K_1.

Es sei E_T die Tangentialebene an die Kugel K_1 im Punkt $R\left(10, 0, 5\sqrt{2}\right)$.

e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangentialebene E_T.

f) Bestimmen Sie den Winkel, unter welchem die Tangentialebene E_T und die Ebene E sich schneiden.

Die Punkte $P(-3, 5, 4)$ und $Q(0, 1, 3)$ liegen auf einer zweiten Kugel K_2, deren Mittelpunkt M_2 sich auf der y-Achse befindet.

g) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius der Kugel K_2.

h) Zeigen Sie, dass die Kugeln K_1 und K_2 sich berühren.

9. [11P] Ein Spielwürfel ist so gefälscht, dass die geraden Augenzahlen 2, 4 und 6 je mit doppelt so grosser Wahrscheinlichkeit erscheinen wie die ungeraden Augenzahlen 1, 3 und 5.

a) Der gefälschte Würfel wird einmal geworfen. Es sei X die geworfene Augenzahl. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standard-abweichung von X.

b) Der gefälschte Würfel wird zweimal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die geworfene Augensumme grösser als 10 ist.

c) Bestimmen Sie mit algebraischen Methoden, wie oft man den gefälschten Würfel mindestens werfen muss, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine ungerade Zahl zu werfen, mehr als 99.99% beträgt.

10. [10P] In einer Urne befinden sich 56 Kugeln. Davon sind x Kugeln weiss, doppelt so viele, also $2x$ Kugeln rot, und die restlichen Kugeln sind schwarz. ($x \in \mathbb{N}_0$)

a) Bestimmen Sie, welche Werte für x zulässig sind.

Nun werden zwei Kugeln <u>ohne</u> Zurücklegen aus der Urne gezogen.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Kugeln gleichfarbig sind, $P(x) = \dfrac{14x^2 - 336x + 3080}{3080}$ beträgt.

c) Bestimmen Sie die Anzahl weisser Kugeln (x) so, dass die Wahrscheinlichkeit von zwei gleichfarbigen Kugeln minimal wird.

d) Bestimmen Sie die Anzahl weisser Kugeln (x) so, dass die Wahrscheinlichkeit von zwei gleichfarbigen Kugeln maximal wird.

Nun werden n Kugeln <u>mit</u> Zurücklegen aus der Urne gezogen. ($n \in \mathbb{N}$)

e) Es sei P die Wahrscheinlichkeit, dass drei weisse Kugeln gezogen werden. Bestimmen Sie einen Ausdruck für P in Abhängigkeit von n und x. ($n \geq 3$)

f) Bestimmen Sie einen Ausdruck für den Erwartungswert der Anzahl gezogener <u>schwarzer</u> Kugeln in Abhängigkeit von n und x.

Maturitätsprüfung 2017 – Klasse 4g MN / M – Mathematik – **Lösungen**

Bei komplizierteren Punkteverteilungen wird grundsätzlich pro groben Fehler ein Punkt abgezogen.

1. a) $f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ 1↓ ; $f'(2) = 0$: $-\frac{a}{4} - \frac{2}{8} = 0 \Rightarrow a = -1$ 2↓

VZW von f' bei $x = 2$ von – auf + oder $f''(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{6}{x^4}$ 3↓ $\Rightarrow f''(2) = \frac{1}{8} > 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Minimum von } f \text{ bei } x = 2 \text{ für } a = -1}$ 4P

b) $f'(1) = -\frac{2}{1} - \frac{2}{1} = -4$ 1↓ ; $f(1) = \frac{2}{1} + \frac{1}{1} = 3 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Tangente: } y = -4x + 7}$ 2P

c) $F(x) = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \boxed{2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + C}$ 2P auch ohne | |,+C

d) $A = \int_1^2 \left(\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) - (-4x + 7) \right) dx$ 2↓ $= \left[2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2x^2 - 7x \right]_1^2$ 3↓ $=$

$\left(2\ln(2) - \frac{1}{2} + 8 - 14 \right) - (0 - 1 + 2 - 7) = \boxed{2 \cdot \ln(2) - \frac{1}{2}} \approx 0.886$ 4P

---

2. a) $V = \pi \int_0^b \left(2e^{-\frac{1}{4}x} \right)^2 dx$ 2↓ $= 4\pi \int_0^b e^{-\frac{1}{2}x} dx = -8\pi \left[e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^b$ 4↓ $= \boxed{8\pi \left(1 - e^{-\frac{1}{2}b} \right)}$ 5P

b) $\lim_{b \to \infty} V = \lim_{b \to \infty} \left(8\pi \left(1 - e^{-\frac{1}{2}b} \right) \right) = 8\pi(1 - 0) = 8\pi$ 1↓

Dies ist ein Beispiel eines unbeschränkten Rotationskörpers mit endlichem Volumen ($8\pi < \infty$); also ist die Behauptung falsch. 3P

---

3. a) $A(x_1) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}(2 - x)\left(-x^2 + 4 \right)$ 1↓ $= \frac{1}{2}\left(x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \right)$ 2P

b) $A'(x_1) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 4x - 4 \right)$ 1↓ $= 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3},\ x_2 = 2 \Rightarrow$ $\boxed{A_{max} \text{ für } x = -\frac{2}{3}}$ 3P

---

4. a) $x \cdot \ln(x) = 2 \cdot x \Rightarrow \ln(x) = 2$ 1↓ $\Rightarrow x = e^2 \Rightarrow$ $\boxed{S\left(e^2, 2e^2 \right)}$ 2P

$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}$ 1↓ $\Rightarrow m_1 = f'\left(e^2 \right) = \ln\left(e^2 \right) + 1 = 3$; $m_2 = 2$ 2↓

Schnittwinkel = arctan (3) – arctan (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi = 8.13°}$ 3P

b) $x\cdot\ln(x)=m\cdot x \Rightarrow x=e^m$ 1↓ $\Rightarrow m_1=f'(e^m)=m+1$ 2↓ ; $m_2=m$

Senkrecht: $m_2=-\frac{1}{m_1} \Rightarrow m=-\frac{1}{m+1}$ 3↓ $\Rightarrow m^2+m+1=0$

Diskriminante $b^2-4ac=1-4<0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{keine Lösung}}$ 4P

c) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0}$ 1P

---

5. Vergleich der Steigungen: $-2x^2+6=-2$ 1↓ $\Rightarrow x=\pm 2$; 1. Quadrant: $x=2$ 2↓

$\Rightarrow$ Punkt auf Tangente bzw. Kurve: $y=-2\cdot 2+5=1$ bzw. $f(2)=1$ 3↓

$f(x)=\int\left(-2x^2+6\right)dx=-\frac{2}{3}x^3+6x+C$ +1P bzw. 4↓ auch ohne +C ;

$f(2)=1 \Rightarrow -\frac{2}{3}\cdot 8+6\cdot 2+C=1 \Rightarrow C=-\frac{17}{3} \Rightarrow$ $\boxed{f(x)=-\frac{2}{3}x^3+6x-\frac{17}{3}}$ 5P

---

6. a) $A=\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$ 1↓ $\approx\frac{b-a}{3n}(y_0+4y_1+y_2)=\frac{\pi}{3\cdot 2}\left(0+\frac{4\cdot\left|\sin((k+0.5)\pi)\right|}{(k+0.5)\pi}+0\right)$ 4↓

$=\frac{\pi}{6}\left(\frac{4\cdot|\pm 1|}{(k+0.5)\pi}\right)=$ $\boxed{\frac{4}{6k+3}}$ 5P

b) $A\approx\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4}{6k+3}$. 1↓ Dies entspricht einer harmonischen Reihe, welche divergiert.

Der totale Flächeninhalt ist somit unendlich. 3P

---

7. a) $\alpha=\arcsin\frac{\left|\vec{b}\circ\vec{n}\right|}{\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$; $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-26\\4\\-10\end{pmatrix}$ 1↓ $\Rightarrow \vec{b}=\begin{pmatrix}13\\-2\\5\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b}\circ\vec{n}=\begin{pmatrix}13\\-2\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=18$ 2↓

$\Rightarrow \alpha=\arcsin\left(\frac{18}{\sqrt{198\cdot 3}}\right)=$ $\boxed{25.24°}$ 4P

oder $\alpha=\arcsin\frac{h_c}{\overline{AC}}$; $h_c=d(C,\text{Ebene})=\frac{|-36|}{3}=12$ 2P ;

$\overline{AC}=\sqrt{792}\approx 28.14$ 1P $\Rightarrow \alpha=\arcsin\frac{12}{\sqrt{792}}=$ $\boxed{25.24°}$ 4P

b) M_{AB} = Fusspunkt der Höhe h_c = Durchstosspunkt der Normalen durch C zu E:

n: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\3\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ in E: $2(-5+2t)-(3-t)-2(2-2t)-19=0$ 3↓ $\Rightarrow t=4$

$\Rightarrow$ $\boxed{M_{AB}(3,-1,-6)}$ 4↓ $\Rightarrow$ $\boxed{B(-15,-1,-24)}$ 5P

c) Richtung der Geraden: $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{n_E}$ 1↓ : $\begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 36 \\ -9 \end{pmatrix}$ 2↓ $= 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Gerade $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}$ 3P

---

8. a) Kugelgleichung K: $\boxed{(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 100}$ 1P

b) Gemeinsame Punkte von Gerade und Kugel:

$(13+4t-3)^2 + (-4+3t-1)^2 + (1+t)^2 = 100$ 1↓ $\Rightarrow 26t^2 + 52t + 26 = 0 \Rightarrow t = -1$ 2↓

genau <u>eine</u> Lösung bedeutet „berühren“ $\Rightarrow$ Berührpunkt $\boxed{B(9,-7,0)}$ 3P

c) $R \in E$: $3 \cdot 10 - 4 \cdot 0 - 30 = 0$ 1P ; $R \in K_1$: $(10-3)^2 + (0-1)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 100$ 2P

d) $h = d(M_1, E) = \dfrac{|9-4-30|}{\sqrt{9+16}}$ 1↓ $= 5$; $r^2 = R_1^2 - h^2 = 100 - 25$ +1P $= 75$

(oder $M_{\text{Kreis}}(6,-3,0)$ und $r = \overline{M_{\text{Kreis}}R}$) $\Rightarrow$ Kreisradius $\boxed{r = 5\sqrt{3} \approx 8.660}$ 3P

e) $\vec{n} = \overrightarrow{M_1R} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 1↓ ; $R \in E_T$: $\boxed{7x - y + 5\sqrt{2}z - 120 = 0}$ 2P

f) $\varphi = \arccos \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \arccos \dfrac{21-(-4)}{5 \cdot 10} = \arccos \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi = 60°}$ 2P

g) $M_2(0,y,0)$ 1↓ und $\overline{PM_2} = \overline{QM_2}$:

$9 + (y-5)^2 + 16 = 0 + (y-1)^2 + 9 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow \boxed{M_2(0,5,0)}$ 2P

$r_2 = \overline{PM_2} = \overline{QM_2} = \sqrt{25} \Rightarrow \boxed{r_2 = 5}$ 1P

h) $\overline{M_1M_2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$ 1↓ ; berühren: $|r_1 \pm r_2| = \overline{M_1M_2}$: $|10 \pm 5| = 5$? Ja!

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Die beiden Kugeln berühren sich.}}$ 2P

---

9. a)

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

2↓ $\Rightarrow E(X)=\frac{1}{9}\cdot 1+\frac{2}{9}\cdot 2+\ldots \Rightarrow \boxed{E(X)=\frac{11}{3}\approx 3.67}$ 4P

$$\Rightarrow Var(X)=\frac{1}{9}\cdot 1^2+\frac{2}{9}\cdot 2^2+\ldots-\left(\frac{11}{3}\right)^2=\frac{147}{9}-\frac{121}{9}=\frac{26}{9}\approx 2.89$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(X)=\frac{\sqrt{26}}{3}\approx 1.6997}$$ 2P

b) $P(\text{Summe} > 10)=P(11)+P(12)=2\cdot\frac{2\cdot 1}{9\cdot 9}+\frac{2\cdot 2}{9\cdot 9}=\boxed{\frac{8}{81}\approx 0.0988}$ 2P

c) $P(\text{ungerade})=\frac{1}{3}\Rightarrow P(\text{mind. 1x ungerade})=1-P(\text{nie ungerade})=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

>0.9999 2↓ $\Rightarrow n>\frac{\log(0.0001)}{\log\left(\frac{2}{3}\right)}\approx 22.7$

$\Rightarrow$ **Man muss den Würfel mindestens 23 Mal werfen.** 3P

---

10. a) Zulässige Werte: $\boxed{0\le x\le 18}$ 1P

b) $P(x)=\frac{x}{56}\cdot\frac{x-1}{55}+\frac{2x}{56}\cdot\frac{2x-1}{55}+\frac{(56-3x)}{56}\cdot\frac{(55-3x)}{55}$ 1↓

$$\Rightarrow \boxed{P(X)=\frac{14x^2-336x+3080}{3080}}$$ 2P

c) $P'(x)=\frac{1}{3080}(28x-336)=0$ 1↓ $\Rightarrow \boxed{x_{min}=12}$ 2P

d) Max. für $P(x)$ am „Rand“: $P(0)=1$ (alle Kugeln schwarz) $\Rightarrow \boxed{x_{max}=0}$ 1P

e) Binomialverteilung: $B_{n,\frac{x}{56}}(3)=$ 1↓ $=\boxed{\binom{n}{3}\cdot\left(\frac{x}{56}\right)^3\cdot\left(1-\frac{x}{56}\right)^{n-3}}$ 2P

f) $E=n\cdot p$ 1↓ $=\boxed{n\cdot\frac{56-3x}{56}}$ 2P

Notenskala und Resultate – Maturitätsprüfung 2017 – Klasse 4g MN / M – Mathematik											
Note	**6**	**5.5**	**5**	**4.5**	**4**	**3.5**	**3**	**2.5**	**2**	**1.5**	**1.0**
Anzahl Punkte	76	68	60	52	44	36	28	20	12	6	0
Anzahl SchülerInnen	2	0	4	4	1	5	5	1	0	0	0

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Total**
Themengebiet	A	A	A	A	A	A	G	G	S	S/(A)	
Anzahl Punkte	12	8	5	10	5	8	12	18	11	10	99
davon aus Pool	12	0	5	5	5	0	12	16	9	6	70